代数曲線族の局所符号数について(代数曲線束の局所不変量の研究)

足利, 正

数理解析研究所講究録 1345 巻 2003 年 203-237

代数曲線族の局所符号数について

東北学院大・工　足利　正 (Tadashi ASHIKAGA)

§0. 序　Sを非特異コンパクト複素曲面，Bを閉リーマン面とし，$f: S \to B$を連結ファイバーを持つ固有全射正則写像とする。この時，fの臨界値集合ΣはBの有限集合であって$B \setminus \Sigma$上fはsmooth射であるが，$t \in B \setminus \Sigma$についてファイバー$f^{-1}(t)$は種数$g \geqq 2$の閉リーマン面であるとする。このようなfを種数gの代数曲線族と呼ぶ。

さて，$\mathrm{Sign}(S)$を$H^2(S; \mathbb{R})$上のカップ積の誘導する交叉型式の符号数とする。本稿で考察するテーマは，この符号数の"局所集中性の問題"と呼ばれているものである。

則ち，もしもfに関するある条件の下で，各ファイバー芽(f, F) $(F = f^{-1}(p),\ p \in B)$に対し"局所符号数" $\sigma(f, F)$がwell-definedで

(i) $\sigma(f, F) \neq 0$となるFは有限個のみである，

(ii) (i)を満たすファイバーの集合を$\{F_1, \cdots, F_\ell\}$とすれば

$$\mathrm{Sign}\, S = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(f, F_i)$$

なる二つの条件が満たされている時，不変量$\mathrm{Sign}(S)$はファイバー芽$(f, F_i)_{1 \leq i \leq \ell}$に局所集中していると呼ぶ。

考えるべき問題群は，

(a) fに関するいかなる条件下で，$\sigma(f, F)$をどう定義

すれば，この特異数の局所集中性が起こるか？

(b) $\sigma(f, F) \neq 0$ となる F の特徴付けは？

(c) $\sigma(f, F)$ を具体的にどのように計算すればよいか？

等である．

これについての現状を述べると，まず最も良くわかっているのが，f が超楕円的曲線族の場合である。この場合，Meyer 関数を用いる位相幾何的アプローチ（松本 [Ma1]，遠藤 [E]）と，特異点を用いる代数幾何的アプローチ（堀川 [Ho]，荒川－A. [AA]）の 2 つの方法があり，これらの同等性も確かめられている．（寺杣 [Te2]）f が非超楕円的な場合は，一般型曲面論の立場からの今野一宏氏 [Ko2]，位相幾何的な古田幹雄氏 [Fu1,2]，保型形式な立場での（上野健爾氏 [U] の方法を拡張した）吉川謙一氏 [Y1] による，それぞれ見かけ上全く異なる立場よりのアプローチが開始されているが，これらのお互いの関係は明確ではなく，この方面の詳しい研究は今後に託されている．（詳しくは今野－A. [AK]，遠藤－A. [AE] 参照）

さて，本稿ではこの方向にもう一歩を進めようとするものである．我々の主張を大雑把にまとめると次のようになる。

(i) 吉川氏 [Y1] の研究した局所符号数は，ある広い意味

での古田氏[Fu1,2]の定式化した局所符号数の範疇で解釈できる。

(iii) 古田氏の定式化した局所符号数については，曲線族の半安定還元に伴うこの不変量の変化を，局所位相モノドロミーを用いて具体的に書き下すことができる。

(i)(iii)の主張の意義や，それに到る動機等については本文中に記すことにしたい。なおこの結果について，本論文はまだ執筆していないが，現在その準備を進めている。

§1. 符号不足数を用いる Furuta の定式化

本節は古田[Fu1][Fu2]の議論の(細部に立ち入らない)大きなタトワクのみを抽出したものである。記号は[Fu1][Fu2]とは少しだけ異なる部分もある。

まず S 上の Hermitian metric h を一つ固定する。$\nabla=\nabla_h$ を h から誘導される接束 T_S の Levi-Civita 接続とする。∇ の曲率形式から誘導される第1 Pontrjagin 類を $P_1(S,\nabla)$ とする。これは S 上の $(2,2)$ 型微分形式である。$L_1(S,\nabla)$ を Hirzebruch の第1 L-多項式とする。衆知のように，

$$L_1(S,\nabla)=\frac{1}{3}P_1(S,\nabla)=\frac{1}{3}\{c_1^2(S,\nabla)-2c_2(S,\nabla)\}$$

である。ここに $c_i(S,\nabla)$ は i 次 Chern 類を示す。古典的な

Hirzebruchの符号数定理[Hi]より，

$$\mathrm{Sign}\, S = \int_S L_1(S, \nabla) \qquad (1.1)$$

となる。これは結局計量や接続のとり方に依存しない量なので，∇ 等は省略してもよいと思われるかもしれないが，(大域不変量としてはそうであっても) 我々はこの不変量の"局在化"の問題を議論するのであり，∇ を省略できないデリケートな部分を有する。

さて積分 (1.1) について，もしも以下のような状況が生じたとしよう。則ち B 上の有限個の点 $P_1, \cdots, P_\ell$ があって，U_i を P_i 中心の十分小さな閉円板とし，$B_\infty = B \setminus \coprod_{1 \le i \le \ell} U_i$，$S_\infty = f^{-1}(B_\infty)$ と置く時，条件

$$\int_{S_\infty} L_1(S, \nabla) = 0 \qquad (1.2)$$

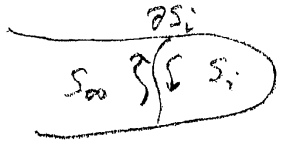
が満たされたとする。この時，$S_i = f^{-1}(U_i)$ とおけば

$$\mathrm{Sign}\, S = \sum_{i=1}^{\ell} \int_{S_i} L_1(S, \nabla) \qquad (1.3)$$

であるが，一方

$$\int_{S_i} L_1(S, \nabla) = \mathrm{Sign}(S_i) - \eta(\partial S_i, \nabla_{\partial S_i}) \qquad (1.4)$$

が成り立つ。ここに $\mathrm{Sign}(S_i)$ は境界付多様体 $(S_i, \partial S_i)$ の符号数，つまり $H^2(S_i, \partial S_i; \mathbb{R})$ 上のカップ積と Lefschetz 双対から誘導される一般には退化な二次形式の符号数である。また $\eta(\partial S_i, \nabla_{\partial S_i})$ は，∇ が ∂S_i に誘導する自然な接続 $\nabla_{\partial S_i}$ に関する符号不足数を表わす。ただし ∂S_i の向き付けは S_i 側から付けられているとする（下図）。



符号不足数は実3次元多様体とその上の線形接続のみに依存する不変量であり，それを bound する4次元多様体とその上への接続の拡張には依存しない。(cf. 古田 [Fu3] 第15章.) 今の場合はもともと S_i なる本体があるわけであるが，これを別のものに取り換えてもよいわけである.（このことは実際§3で使われる.）

そこで $F_i = f^{-1}(P_i)$ とし，

$$\sigma(f, F_i) := \mathrm{Sign}(S_i) - \eta(\partial S_i, \nabla_{\partial S_i}) \tag{1.5}$$

とおけば，(1.3), (1.4) より

$$\mathrm{Sign}\, S = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(f, F_i) \tag{1.6}$$

なる"局所集中式"が得られる.(注) ただし (1.5) 式が，

(注) [Fu] では C^∞ ファイバー束 $S_\infty \to B_\infty$ を考え，$\mathrm{Sign}\, S_\infty$ が (1.2) の下で S_∞ の側から向き付けした $\partial S_\infty = \coprod_{1 \le i \le \ell} \partial S_i$ の符号不足数に一致することから，Novikov 加法性より (1.6) 式を与えている. 向き付けのことは，これが正統なのでしょうけれど，古田さんすみません。

ファイバー芽の不変量として well-defined であること，つまりは (1.2) 式がいったん U_i を定めれば，それをさらに任意のさらに小さな近傍に縮めても良いことは確認しておかねばならない。

(1.5) の $\sigma(f, F_i)$ を，ファイバー芽 (f, F_i) の古田の意味の局所符号数，もしくは単に局所符号数という。（本稿ではこれ以外のものを局所符号数と呼ぶことはない。）

[Fu1] [Fu2] では (1.2) が満たされるいくつかの幾何的な十分条件が考察されている。そのうち，例えば $\mathbb{P}^1$ への一般被覆次数を持つ分岐曲線族に関する考察等は，筆者にとって興味深いものである。（[Fu1] [Fu2] は研究集会の解説記事であり正式な論文が待たれるところである。）なお筆者にとっては，1999年のある時期に，直接古田氏自身から上の考えをお教えいただいた。氏に感謝を捧げたい。

ただ，これから考察しようとするのは，[Fu1] [Fu2] 中にある一つの十分条件ではなくて，それとは少し別の文脈から吉川謙一氏 [Yo1] が提示したものである。次節でそれを述べよう。

§2. Yoshikawa-generic な曲線族

本節では吉川謙一氏[Y1]が提示・考察したfに関する条件を扱う。この条件の下では前節(1.2)式が満たされ、従って Furuta の意味の局所符号数が well-defined となることを示す。この証明には Bismut-Gillet-Soulé の公式[BGS]が用いられる。また[Y1]で定義された局所符号数が、§1での概念の範疇で解釈できることを注意する。

2.1 まず[Y1]の状況を再現しよう。A_gをg次元主偏極 Abel 多様体の moduli 空間とする。$\mathfrak{S}_g$を Siegel 上半平面とするとA_gは Siegel 空間$\mathfrak{S}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$に同型である。今，$\pi: C \to A_g$を主偏極 Abel 多様体の普遍族とする。(ただしここでは orbifold sense で考えている。) ω_{C/A_g}をπの相対双対化層とし

$$\lambda = \bigwedge^{max} \pi_* \omega_{C/A_g}$$

と置く。我々は直線束λもしくはその適当な tensor 積$\lambda^{\otimes k}$の"具体的"切断が欲しいのであるが、以下に述べる井草保型形式がそれに答えてくれる。まず，縦ベクトル表示された変数$(z,\tau) \in \mathbb{C}^g \times \mathfrak{S}_g$,

$\delta, \varepsilon \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ に対して，テータ関数

$$\theta_{\delta,\varepsilon}(z,\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \left\{ {}^t\!\left(m+\frac{\delta}{2}\right)\tau\left(m+\frac{\delta}{2}\right) + 2\,{}^t\!\left(m+\frac{\delta}{2}\right)\left(z+\frac{\varepsilon}{2}\right) \right\}$$

を考える。さらに，

$$\theta_{\delta,\varepsilon}(\tau) := \theta_{\delta,\varepsilon}(0,\tau)$$

とおいてテータ定数と呼ぶ。これは $\mathfrak{S}_g$ 上の正則関数である。さて偶テータ定数の積

$$\chi_g(\tau) := \prod_{{}^t\delta\varepsilon \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)} \theta_{\delta,\varepsilon}(\tau)$$

は重さ $2^{g-2}(2^g+1)$ の Siegel 保型形式となり，$H^0(A_g, \lambda^{\otimes 2^{g-2}(2^g+1)})$ の元を与える。χ_g の zero locus が与える A_g 上の因子を

$$\theta_{null} := (\chi_g) \subset A_g$$

と書いておく。

さて，与えられた種数 g の曲線族 $f: S \to B$ に対して，f の臨界値集合の補集合を $B^0 = B \setminus \Sigma$ とし，固有 smooth 射 $f^0 := f|_{S^0} : S^0 = f^{-1}(B^0) \to B^0$ を考える。f^0 の誘導する相対 Jacobi 写像を

$$\begin{array}{cccc} J_{f^0}: & B^0 & \longrightarrow & A_g \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & t & \longmapsto & (\mathrm{Jac}\, S_t, W^{g-1}(S_t)) \end{array}$$

と定める。ここに $\mathrm{Jac}\, S_t$ はファイバー $S_t = f^{-1}(t)$ の Jacobi 多様体，$W^{g-1}(S_t)$ は S_t の $(g-1)$ 次対称積 $\mathrm{Symm}^{g-1}(S_t)$ からの $(g-1)$ 次 Abel-Jacobi 写像の像であり，（Riemann 定数を法として）$\mathrm{Jac}\, S_t$ のテータ因子に一致している。（なおここでは，もともと Abel 多様体の主偏極構造は，Θ 因子で入れていると思っている。例えば Mumford [Mu1] 参照。）

<u>定義 2.2</u>　$f : S \to B$ が Yoshikawa-generic な曲線族（Y-generic と略す）であるとは，

$$J_{f^0}(B^0) \not\subset \Theta_{null}$$

であることと定義する。

一般には $J_{f^0}(B^0)$ は A_g 上の曲線なので因子 Θ_{null} とは有限個の点で交わるが，非常に特別な場合として $J_{f^0}(B^0)$ が Θ_{null} の locus にすっぽり含まれることが起こりうる。これを排除したのが Y-generic という条件である。なお [Y1] では，この条件のさらに幾何的な言い換えがなされている。

2.3　以下 f を Y-generic と仮定する。B の有限集合 $\tilde{\Sigma}$ を

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup J_{f_0}^{-1}(J_{f_0}(B_0) \cap \Theta_{null}) \tag{2.3.1}$$

によって定義する。$\tilde{\Sigma}$ の各点 p の十分小さな開円板近傍を U_p とし，$B' = B \setminus \coprod_{p \in \tilde{\Sigma}} U_p$ とおいて，固有 smooth 射 $f' := f|_{S'} : S' = f^{-1}(B') \to B'$ を考える。S' の計量として，S' の接束の相対接束と底空間の接束の引きもどしへの分解 $T_{S'} = T_{S'/B'} \oplus f'^{*}T_{B'}$ に対応する Kähler 計量 h (cf. [BGS]) を一つ入れ，これを固定する。(h のとり方は一意的ではない。) h の誘導する Levi-Civita 接続を ∇ とする。この時：

命題 2.4　$$\int_{S'} L_1(S', \nabla) = 0.$$

これによって (1.2) の条件が満たされたので，Y-generic な f について，ファイバー芽に対する局所符号数が well-defined であり，$\mathrm{Sign}\, S = \sum_{p \in \tilde{\Sigma}} \sigma(f, F_p)$ が満たされる。$\sigma(f, F_p) \neq 0$ となる可能性を持つファイバー $F = f^{-1}(p)$ は，特異ファイバーであるか，もしくは $[\mathrm{Jac}(S_p)] \in A_g$ が因子 Θ_{null} に属するかの，いずれかになるわけである。

2.5　命題2.4の証明のためのKey Lemmaを与えよう。今の場合，f'が固有射であることから，代数幾何出身の者なら，とりあえずまずGrothendieck-Riemann-Roch（つまりR.R.の相対版）が使えないか，と思うであろう．しかしS'は（代数多様体Sの古典トポロジーによる"一部分"ではあるが）それ自身代数多様体ではないのでそれはできないなあ----と悲観するしかなかったのは約15年以上前の時代であって，局所指数定理が発達した現代では可能である。今の場合f'がsmooth射なのでBismut-Gillet-Soulé [BGS] の範疇である。

f'に対して [BGS] を適用するための用語を準備する。一般にξをS'上の直線束とする。ξから決まるGrothendieck-Knudsen-Mumford [KM] のdeterminant line bundle

$$\lambda(\xi)=\left(\bigwedge^{max}\pi'_*\mathcal{O}(\xi)\right)^{-1}\otimes\left(\bigwedge^{max}R^1\pi'_*\mathcal{O}(\xi)\right)$$

を考える．$\lambda(\xi)$のQuillen計量を$\| \ \|_Q$とする。(注)

(注) 念のためQuillen計量とは，$\lambda(\xi)$の各ファイバー$\left(\bigwedge^{max}H^0(S_t,\xi)\right)^{-1}\otimes\left(\bigwedge^{max}H^1(S_t,\xi)\right)$ $(t\in B')$を通常の仕方で調和微分形式の空間と思った時に入るL_2計量$\| \ \|$を，Ray-Singer [RS] のanalytic torsionでtwistしたものである。正確な定義は原論文 [Q] か又は吉川氏の解説記事 [Y2] 参照。なおdeterminant line bundleの本来の定義は一般にDirac作用素の族に対してなされるもので（cf. Freed [F]），上の書き方は簡易的である。例えば代数幾何的状況で [KM] のそれと一致することは [BGS] 中の定理である。

この時，Bismut-Gillot-Soulé の公式は

$$c_1(\lambda(\xi), \| \ \|_Q) = -\int_f \left[Ch(\xi, \| \ \|) \cdot Todd(K_{S'/B'}^{-1}, \| \ \|^{-1}) \right]^{(4)} \qquad (2.5.1)$$

の形となる。ここに左辺は $\lambda(\xi)$ を Quillen 計量で測った第1 Chern 類である。（つまり $\lambda(\xi)$ の C^∞ 切断 σ に対して，$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \partial\bar\partial \log \| \sigma \|_Q$ としたものである。）また右辺は，通常の L_2 ノルムで測った ξ の Chern 指標と双対相対標準束の Todd 類の積の4-型式部分を，fiber 積分して B' 上の2-型式に落としたものである。ここでは，$Ch = 1 + c_1 + \frac{c_1^2}{2!} + \cdots$，$Todd = 1 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{12} c_1^2 + \cdots$ であるので右辺の積分の中身は

$$\frac{1}{2} c_1(\xi) \left(c_1(\xi) + c_1(K_{S'/B'}^{-1}) \right) + \frac{1}{12} c_1(K_{S'/B'}^{-1})^2$$

となる。特に $\xi = K_{S'/B'}$ と置くと $R^1 f'_* \mathcal{O}(\xi) \simeq \mathcal{O}_{B'}$ であるので，(2.5.1) は

$$c_1\left(\bigwedge^g f'_* K_{S'/B'}, \| \ \|_Q \right) = \frac{1}{12} \int_f c_1(K_{S'/B'}, \| \ \|)^2 \qquad (2.5.2)$$

となる。（以下通常の L^2 ノルム $\| \ \|$ はこれを省略し，Quillen ノルムの時のみ略さないことにする。）これを用いて次の補題を得る。

<u>補題 2.6</u>

$$\int_{S'} L_1(S', \nabla) = 4 \int_{B'} c_1\left(\bigwedge^g f'_* K_{S'/B'}, \| \ \|_Q \right)$$

(証) 境界 $\partial S'$ の近傍では積計量が入っているのでここでの測地的曲率は消えている。よって境界付 Gauss-Bonnet の公式より

$$\int_{S'} c_2(S') = \chi_{top}(S') = (2-2g)\,\chi_{top}(B')$$

となる。(χ_{top} は位相的オイラー数) 同じく Gauss-Bonnet より $\int_{B'} c_1(K_{B'}) = -\chi_{top}(B')$ であるので、

$$\int_{S^0} c_1(K_{S'/B'})^2 = \int_{S^0} \{ c_1(K_{S'})^2 - 2c_1(K_{S'})c_1(f^*K_{B'}) \}$$

$$= \int_{S^0} c_1(K_{S'})^2 + 2(2g-2)\,\chi_{top}(B')$$

となり、これと (2.5.2) をあわせて

$$\int_{S'} L_1 = \frac{1}{3}\int_{S'} c_1(K_{S'/B'})^2 = 4\int_{B'} c_1(\bigwedge^g f'_* K_{S'/B'}, \|\ \|_{\Omega})$$

を得る。 Q.E.D.

よって $\left(\bigwedge^g f'_* K_{S'/B'}\right)^{\otimes 2^{g-2}(2^g+1)}$ の次数を＃導保型形式の相対Jacobi写像による引きもどしが測っていることを鑑みると、補題2.6より命題2.4が得られる。

2.7　Y-generic な $f: S \to B$ に対しての局所符号数の (F_p, f) の具体的計算については，F_p が Lefschetz fiber（つまり node がただ1個の半安定曲線もしくは非特異ファイバー）の場合には [Y1] で研究されている。その骨子は次のとおりである。

$\overline{A}_g^{(1)}$ を Mumford [Mu2] による階数1の A_g の部分コンパクト化とする。$\overline{A}_g^{(1)}$ は A_g の佐武コンパクト化 $A_g^* = A_g \amalg A_{g-1} \amalg \cdots \amalg A_0$ における境界の最大ストラタ A_{g-1} に沿って $A_g \amalg A_{g-1}$ を blow up したものに同型であり，Lefschetz fiber に対応する一般化 Jacobi 多様体を parametrize している。θ_{null} の A_g^* での閉包の，この blow up による固有像を $\tilde{\theta}_{null}$ とし，$\overline{A}_g^{(1)}$ の境界因子を $\delta = \overline{A}_g^{(1)} \setminus A_g$ とおく。$\overline{A}_g^{(1)}$ の因子 $(\overline{\chi_g})$ を

$$(\overline{\chi}_g) := \tilde{\theta}_{null} + 2^{2g-5}\delta$$

によって定義する。（こう置く理由は [Mu2, Theorem 2.10] 参照。）F_p は Lefschetz fiber なので，U_p を P の B での小円板近傍とする時，相対 Jacobi 写像 $J_{loc}: U_p \setminus \{P\} \to A_g$ は拡張 $\overline{J}_{loc}: U_p \to \overline{A}_g^{(1)}$

を持つ。この時：

<u>命題 2.8 (compare [Y1])</u>　上の状況で

$$\sigma(f, F_p) = \frac{1}{2^{g-4}(2^g+1)}\left(J_{loc}(\upsilon_p)\cdot\overline{(\chi_g)}\right)_p - \#\,\mathrm{Sing}\,F_p$$

となる。ここに $\left(J_{loc}(\upsilon_p)\cdot\overline{(\chi_g)}\right)_p$ は曲線 $J_{loc}(\upsilon_p)$ と因子 $\overline{(\chi_g)}$ の p での局所交点数を表わす。

ただし [Y1] では上の命題は局所符号数の定義として採用されているものであるが，実は§1で定義した局所符号数に一致している。その証明は命題 2.4 のそれと類似的であるが，今の場合は Bismut-Gillet-Soulé の公式の換わりに，nodes のみを許す退化族の場合にそれを拡張した Bismut-Bost [BB] の公式を用いる。

上の $\sigma(f, F_p)$ の式をもう少し具体的状況に適応することについては [Y1] 中の定理 9.1，定理 9.3，系 9.4 などを参照されたい。

なお筆者は，吉川謙一氏とは 1999 年に氏がまだ名古屋におられた頃，大沢健夫氏を介して知り合った。

以来，氏が東京に移られた後も，折にふれて貴重なお教えを受けている。氏に多大な感謝を捧げたい。

2.9　Lefschetz族だけでなく，Y-genericな半安定族に対しても是非とも同様の議論を行ないたいのであるが，それはまだなされていないように思う。

当然考えられるアプローチは，先程の古典的な部分コンパクト化 $\bar{A}_g^{(1)}$ の換わりに，現代のもっと発達した種々の（部分）コンパクト化を用いることであろう。（その最たるものは [KU]．）ただし自然な保型形式から生ずる Θ_{null} 等の境界挙動を知る事が今後に託された課題であろう。

もう一つ，この族を分裂変形させることによってLefschetz族の場合に帰着させることが考えられる。この方法では不変量の変形行動を正確にとらえられるかが焦点となろう。

筆者もこれらについて，ほんの少しだけ思うこともあるのであるが，現時点では不明なままである。

さて読者は，もしも半安定族について考察が可能になっても，一般の退化を許す曲線族につい

ではまだ話が違い，と思うかもしれない。これについてはいやそんな事はない，大丈夫ですと答えることができる。一般の退化族を，底変換によって半安定還元させた場合，この操作に伴う局所符号数の変動を正確に記述できるからである。このことは Y-generic な族に限らず，いったん Furuta の意味の局所符号数として定式化されたものについては，すべて可能である。この formalizm が"群作用を許容する指数定理"という大きな道具の適用範囲内にあるからである．それを次節で述べよう．

§3. 半安定還元に伴う局所符号数の変化量

3.1 本節ではファイバー芽の複素近傍に限定した話をする。今までとは若干記号の乱用になるが，

$$f : S \longrightarrow \Delta = \{ t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq \varepsilon \}$$

を種数 g の退化族，つまり S は非特異，f は $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ 上 smooth 正則写像で，一般ファイバーは種数 g のリーマン面とする。f は normally minimal つまり F の

被約スキーム F_{red} は正規交叉しており，(−1) 曲線は他成分と3点以上で交わると仮定する。ここでもし F が半安定ファイバー，つまり（今の状況では）$F_{red} = F$ であるならば何もしない。そうではなくて F が非半安定ファイバーである状況を考える。今，

$$
\begin{array}{ccc}
S & \xleftarrow{\ \tilde{\rho}\ } & \tilde{S} \\
f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\
\Delta & \xleftarrow{\ \rho\ } & \tilde{\Delta}
\end{array}
\qquad (3.1.1)
$$

を f の半安定還元とする。（[DM], [BPV]）ρ は原点のみで totally ramify する次数 n の円板間の巡回被覆，$\tilde{S}$ は $S \times_{\Delta} \tilde{\Delta}$ の正規化の持つ巡回商特異点の解消空間である。$\tilde{f}$ の中心ファイバー $\tilde{F} = \tilde{f}^{-1}(0)$ は半安定である。被覆次数 n はこのような条件を満たす最小値にとられていると仮定する。∇ を S 上の1つの線形接続として固定する。この時，2つの局所符号数

$\sigma(f, F) = \operatorname{sign} S - \eta(\partial S, \nabla_{\partial S})$，$\sigma(\tilde{f}, \tilde{F}) = \operatorname{sign} \tilde{S} - \eta(\partial \tilde{S}, \nabla_{\partial \tilde{S}})$

が考えられる。（ここに $\nabla_{\partial \tilde{S}}$ は ∇ と ρ から自然に誘導される接続とする。）この時，

$$\mathrm{def}(f,F) := \sigma(f,F) - \frac{1}{n}\sigma(\tilde{f},\tilde{F})$$

と置いて，これを半安定不足数（semi-stable defect）とでも呼んでおこう。本節では def(f,F) を f の持つ位相モノドロミー情報（Nielsen－松本－Montesinos' data [MM]）を用いて具体的に記述する。

このことを考える動機は 2.9 節でも少し触れたが，もう少し概括的に述べておくと次のとおりである。一般に局所符号数の問題の困難性は，

(i) ファイバー芽 (f, F) の位相構造から来る複雑さ，

(ii) (f, F) の代数幾何的"神妙さ"

が複合して生じていると考えられる。(i) は f の持つ位相モノドロミーの複雑さと言い換えることもできるが，この部分の"寄与"を取り除いて，今後の研究の比重を (ii) の部分に集中させたいと思うわけである。少なくとも本節の結果より，以後半安定族についてのみ考察すればよいことになる。

ちなみに (ii) の困難性の発見は，歴史的には今野一宏氏 [Ko1] による，非超楕円的種数 3 の族に混在する非特異超楕円的ファイバーが与える代数曲面の大域不変量への"効果"の観察がその

出発点になっている。（このことは[AK][AE]でも解説されている。）また，Υ-generic な点については，一般化Jacobi多様体のモジュライ空間へのモジュライ写像と Θ_{null} の閉包の関わり具合の問題と言えるであろう。

3.2　目的のために境界付同変符号数定理（[AS], [HZ], [APS]）を用いるので，この方面の用語を準備しつつ，アイデアのあらすじを述べる。

図式(3.1.1)を考える。この時，$\tilde{S}$ には巡回群 $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が正則に作用し，商空間 $\tilde{S}/G$ の特異点解消を行ない，その normally minimal model をとったものがもとの S である。今，

$$\hat{H}^2 := \mathrm{Im}\{H^2(\tilde{S}, \partial\tilde{S} : \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(\tilde{S} : \mathbb{R})\}$$

と置くと，カップ積から誘導される交叉型式は $\hat{H}^2$ 上 perfect pairing であるが，これの正及び負の固有空間への直和分解を $\hat{H}^2 = H_+ \oplus H_-$ とする。

各 $g \in G$ に対して，

$$\mathrm{sign}(g, \tilde{S}) = \mathrm{Tr}(g|_{H^+}) - \mathrm{Tr}(g|_{H^-})$$

と置く。Atiyah-Singer [AS] で定義された g の

固定点集合への作用により規定される特性類 $L(g,\tilde{S})$ は，$\tilde{S}$ が実4次元故，

$$L(g,\tilde{S}) = -\sum_{x} \cot\left(\frac{1}{2}\alpha_{x,g}\right)\cot\left(\frac{1}{2}\beta_{x,g}\right) + \sum_{Y} \mathrm{cosec}^2\left(\frac{1}{2}\theta_{Y,g}\right)\cdot Y^2 \qquad (3.2.1)$$

の形をしている。ここに x は g 作用に関する孤立固定点集合を動き，接空間 $T_{x,\tilde{S}}$ への g 作用の固有値を $e^{i\alpha_{x,g}}$, $e^{i\beta_{x,g}}$ としている。また Y は g 作用による固定複素曲線（必然的にスムーズ）を動き，法束 $N_{Y,\tilde{S}}$ への g 作用の固有値を $e^{i\theta_{Y,g}}$ としている。今，g 作用付の符号不足数（[HZ] [APS]）を $\eta(g,\partial\tilde{S},D_{\partial\tilde{S}})$ とすると，

$$\mathrm{sign}(g,\tilde{S}) = L(g,\tilde{S}) + \eta(g,\partial\tilde{S},D_{\partial\tilde{S}})$$

である。一方，Hirzebruch-Zagier [HZ] pp.72〜75 にあるように Conner-Floyd [CF] の free cobordism theorem を用いて(注)

$$\frac{1}{n}\sum_{g\in G} \eta(g,\partial\tilde{S},D_{\partial\tilde{S}}) = \eta(\partial S, D_{\partial S}) \qquad (3.2.2)$$

(注) 境界の近傍に積計量が入っており，その計量に関する Levi-Civita 接続を考えているとすれば，符号不足数は Atiyah-Patodi-Singer [APS, I] のエータ不変量に一致しており，(3.2.2) は [APS, II] にある同変公式から従う。([At], [OS] にもこの議論がある。) ここではエータ不変量を表に出すことは避け，元来の符号不足数の範疇で議論している。

を得る。一方 $\tilde{S}/G$ を有理ホモロジー多様体としての交叉型式の符号数を $\mathrm{sign}(\tilde{S}/G)$ とすると，

$$\mathrm{sign}(\tilde{S}/G) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\mathrm{sign}(g, \tilde{S})$$

となる。(cf. [HZ] p.31) よって

$$\sigma(f, F) = (\mathrm{sign}\, S - \mathrm{sign}\, \tilde{S}/G) + \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\{\mathrm{sign}(g, \tilde{S}) - \eta(g, \partial\tilde{S}, D_{\partial\tilde{S}})\}$$

となる。これより

$$\mathrm{def}(f, F) = \left(\mathrm{sign}\, S - \mathrm{sign}\, \tilde{S}/G\right) + \frac{1}{n}\sum_{g\neq id} L(g, \tilde{S}) \quad \cdots (3.2.3)$$

を得る。(3.2.3)式の第1項は解析空間 $\tilde{S}/G$ の特異点解消データに依存して決まる。また同式の第2項は，(3.2.1) より G の各元の固定点集合の近傍への作用の仕方に依存して決まる。

実はこれら第1，第2項とも，退化 f の位相モノドロミー情報を用いて具体的に書き下すことができるのである。これが可能な理由は，高村茂氏 [Ta2] によって，G の $\tilde{S}$ への作用の仕方，$\tilde{S}/G$ の持つ商特異点の分類及びその解消データと，Nielsen-松本-Montesinos' data 及び松本-Montesinos の一般商空間の構成アルゴリズム [MM] との対応関係が明確になった事による。

3.3　モノドロミーの用語を準備する。fの位相モノドロミーの代表元となっているリーマン面Σ_gの位相的自己同型写像を$\mu = \mu_f : \Sigma_g \to \Sigma_g$とする。$\mu$は負型擬周期写像という、写像類群の中の特別な元になっている。ここで、Nielsen [N]，松本-Montesinos [MM] による，この元の数値的特徴付けを思い出そう。（解説記事[Ma2]も参照。）

Isotopyを法として，μは次のように記述される。μの認容単純閉曲線系C及びその補空間であるbody部$B = \Sigma_g \setminus C$の連結成分への分解をそれぞれ

$$C = \coprod_{1 \le i \le s} C_i \ , \quad B = \coprod_{1 \le j \le l} B_j$$

とする。nをμの周期とする。つまりnは$\mu_{|B}^n = id_B$となる最小の自然数である。（3.1節でできたρの写像度nに一致しているのでこの記号を用いている。）
各B_jに対し自然数$n(B_j)$を，集合として

$$\mu^{n(B_j)}(B_j) = B_j$$

が満たされる最小数として定義する。

またB_jの境界になっているCの成分の中で，B_jと異なる他の連結成分の境界にもなっているような単純閉曲線の個数を$c(B_j)$と書く。

B内の重複点（つまり$\langle \mu \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$の作用に関す

る非自明な isotropy 群を持つ点）の集合を $\mathbb{P}(B)$ とする。各 $p\in\mathbb{P}(B)$ に対して $(m(p),\lambda(p),\sigma(p))$ をその valency とする。整数 $\delta(p)$ を $0<\delta(p)<\lambda(p)$, $\delta(p)\sigma(p)\equiv 1 \pmod{\lambda(p)}$ によって定める。$\mu^{m(p)}$ は点 p を固定し，その円板近傍を適当な parametrization に関して角度 $2\pi\,\delta(p)/\lambda(p)$ だけ回転させる。

次に cut curve C_i の annulus 近傍 $A(C_i)$ を考える。$A(C_i)$ は 2 つの境界 $C_i^{(1)}$ と $C_i^{(2)}$ を持っている。μ のここでの valency をそれぞれ $(m(C_i),\lambda(C_i^{(k)}),\sigma(C_i^{(k)}))$ $(k=1,2)$ とする。整数 $\delta(C_i^{(k)})$ を $0<\delta(C_i^{(k)})<\lambda(C_i^{(k)})$, $\delta(C_i^{(k)})\sigma(C_i^{(k)})\equiv 1 \pmod{\lambda(C_i^{(k)})}$ によって定める。$\mu^{m(C_i)}$ は $C_i^{(k)}$ を集合として固定し，annulus の外側からの向き付けによる適当な parametrization に関して，$C_i^{(k)}$ を角度 $2\pi\,\delta(C_i^{(k)})/\lambda(C_i^{(k)})$ だけ回転させる。$s(C_i)$ を C_i における screw number とし，

$$K(C_i)=-s(C_i)-\frac{\delta(C_i^{(1)})}{\lambda(C_i^{(1)})}-\frac{\delta(C_i^{(2)})}{\lambda(C_i^{(2)})}$$

とおく。$K(C_i)$ は -1 以上の整数である。また，

$$c(C_i)=\mathrm{g.c.d.}(\lambda(C_i^{(1)}),\lambda(C_i^{(2)})),\quad \tilde{\lambda}(C_i^{(k)})=\lambda(C_i^{(k)})/c(C_i)\ (k=1,2),$$

$$\beta(C_i)=\mathrm{l.c.m}(\lambda(C_i^{(1)}),\lambda(C_i^{(2)}))=\tilde{\lambda}(C_i^{(1)})\tilde{\lambda}(C_i^{(2)})c(C_i)$$

と置く。写像 $\mu^{m(C_i)\beta(C_i)}$ の $A(C_i)$ の両側の 2 つの

body 成分への制限は恒等写像となる。また $m(C_i)\beta(C_i)$ はこのような性質を満たす最小の自然数である。

Cの成分のうち、non-amphidrome curves の集合を N_{amp} と書く。また amphidrome curves の集合を A_{mp} と書く。

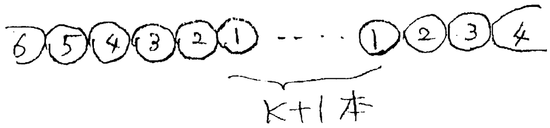
もしも C_i が amphidrome curve であれば、$m(C_i)$ は偶数であって $\mu^{\frac{m(C_i)}{2}}(C_i^{(1)}) = C_i^{(2)}$ となる。さらに $\lambda(C_i^{(1)}) = \lambda(C_i^{(2)}) = \beta(C_i)$, $\delta(C_i^{(1)}) = \delta(C_i^{(2)})$ であるので、これらをそれぞれ $\lambda(C_i)$, $\delta(C_i)$ と書く。また、この時は $K(C_i) \geq 0$ である。

写像 μ による、松本-Montesinos の一般商空間を $\Sigma_g/\langle\mu\rangle$ と書く。$p \in \mathbb{P}(B)$ での valency から定まる $\Sigma_g/\langle\mu\rangle$ 上の対応する $\mathbb{P}'$-tree の長さを $T(\frac{\sigma(p)}{\lambda(p)})$ と書く。また $A(C_i)$ での両側の valency と screw number から定まる $\Sigma_g/\langle\mu\rangle$ 上の対応する $\mathbb{P}'$-tree の長さを $T(C_i) := T\left(\frac{\sigma(C_i^{(1)})}{\lambda(C_i^{(1)})}, \frac{\sigma(C_i^{(2)})}{\lambda(C_i^{(2)})}, K(C_i)\right)$ と書く。ここで body 部の商にあたる $\Sigma_g/\langle\mu\rangle$ の成分はこの長さにカウントされないことを注意しておく。例えば、

$$T\left(\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, K\right) = \begin{cases} 5 & \cdots \text{ if } K = -1 \\ K+7 & \cdots \text{ if } K \geq 0 \end{cases}$$

であることは、下の一般商空間の部分グラフから明らかである。(ここに円は$\mathbb{P}^1$、半円は円板、その中の数字は重複度を示す。)

(K=−1のとき)



(K≧0のとき)

さて、半安定環元の図式(3.1.1)を与える写像ρの被覆次数の最小値nが、正に位相モノドロミー写像μ_fの周期に一致していることはすでに述べた。半安定族$\tilde{f}: \tilde{S} \to \tilde{\Delta}$の位相モノドロミー$\mu_{\tilde{f}}$は$(\mu_f)^n$に等しく、また擬周期写像としての$\mu_{\tilde{f}}$の許容単純閉曲線系は$C$に一致する。さらに$\mu_{\tilde{f}}$はbody部$\Sigma_g \setminus C$上恒等写像にisotopicであり、annulas $A(C_i)$上右手整数Dehn twistを与えるが、その回数を$d(C_i)$とおく。この時、もしC_iがnon-amphidromeならば

$$d(C_i) = \delta(C_i^{(1)})\tilde{\lambda}(C_i^{(2)}) + \delta(C_i^{(2)})\tilde{\lambda}(C_i^{(1)}) + K(C_i)\beta(C_i)$$

となり、またC_iがamphidromeならば

$$d(C_i) = 2\delta(C_i) + 2K(C_i)\lambda(C_i)$$

となる。

以上でモノドロミーの用語の準備は整ったが，もう一つ，Hirzebruch-Zagier [HZ] にあるように，同変符号数定理を応用する際には（少しだけ一般化された）Dedekind 和の記号を用意しておくことが有効である。一般に自然数 N, a_1, a_2 に対して，$c_k = \gcd(N, a_k)$, $a_k' = a_k/c_k$, $N_k = N/c_k$ $(k=1,2)$ とし，$c = \gcd(N_1, N_2)$ とおく。c と a_k' $(k=1,2)$ はそれぞれ互いに素である。この時，

$$\mathfrak{S}(N; a_1, a_2) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{c-1} \left(\left(\frac{a_1' j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{a_2' j}{c}\right)\right) & \text{if } c \geq 2 \\ 0 & \text{if } c = 1 \end{cases}$$

と定義する。もしも N と a_k $(k=1,2)$ がそれぞれ互いに素ならば $\mathfrak{S}(N; a_1, a_2)$ は通常の Dedekind 和である。（cf. [RG]）

さて，本節の主張は次の定理である：

定理3.4

$$\mathrm{dof}(f,F) = -\frac{1}{3n}\sum_{1\le j\le l}\left\{\left(\frac{n}{n(B_j)}\right)^2-1\right\}c(B_j)$$

$$-\sum_{p\in \mathbb{P}(B)}\left\{\frac{4\lambda(p)\,\mathfrak{s}(\lambda(p):\delta(p),1)}{n}+T\left(\frac{\sigma(p)}{\lambda(p)}\right)\right\}$$

$$-\frac{2}{3n}\sum_{1\le i\le s}\sum_{k=1}^{d(C_i)-1}\left\{\gcd\left(\beta(C_i),\ \delta(C_i^{(1)})\tilde{\lambda}(C_i^{(2)})-k\right)^2-1\right\}$$

$$-\frac{4}{n}\sum_{1\le i\le s}\sum_{k=0}^{d(C_i)-1}\beta(C_i)\,\mathfrak{s}\left(\beta(C_i):\delta(C_i^{(1)})\tilde{\lambda}(C_i^{(2)})-k,\ -\delta(C_i^{(1)})\tilde{\lambda}(C_i^{(2)})+k+1\right)$$

$$-\sum_{C_i\in N_{amp}}\left\{T(C_i)-d(C_i)+1\right\}-\sum_{C_i\in A_{mp}}\left\{T(C_i)-\frac{d(C_i)}{2}+3\right\}.$$

証明は，まず(3,2,3)式の右辺は，[HZ] pp.176~181の議論にあるようにRademacherの公式[RG]等を用いてDedekind和等を用いる形に変形される．それを先に触れた高村[Ta2]の結果を用いながら，丹念に位相モノドロミー情報によって書き下していくことにより得られる。

なお，この定理の種数3の曲線族への応用については石坂[I]を参照されたい。

ここでは本定理の証明についてこれ以上の説明をする事は避け，いささか私事になって恐縮であるが，

これを考えるに到った経緯を有体に述べて，その換わりとしたい。

曲線族 $f: S \to B$ を持つ一般型代数曲面 S の基本不変量 $(K_S^2, \chi(\mathcal{O}_S))$ の存在域は，f の一般ファイバーの持つ代数幾何的"特殊性"に強く影響される。また，これらの不変量がどのファイバー芽に"局在化"し，且つその地理的下限からのズレを測る Horikawa 指数をどう計算するかは，現在の代数曲面論が抱える基本的問題の一つのように筆者には感じられる。

これに対する有力なアプローチの一つとして，大雑把に言って

Step 1　f が(半)安定族の時に，何かの moduli 理論を経由して，何かを成す。

Step 2　(半)安定還元における不変量の変化を正確に測って，Step 1 と合わせて何かを言う。

という手段が考えられる。Step 1 については，Cornalba-Harris [CH] や森脇淳氏 [Mo] のお仕事，Step 2 については Sheng-Li Tan 氏 [Tan] のお仕事等がその典型例と言えよう。(注) しかし不変量の局在化の詳細な研究という観点からすれば，今は始動期の段階で多くの問題が将来に託されていると感ぜられる。本稿も本質的にこの

(注) 勿論この路線以外にも有力なものもあり，その最たるものは現時点でのこの方面の代表的成果と言える，今野一宏氏 [Ko2] による相対 Koszul 複体を用いる方法であろうけれど。

路線上にあるのであるが，ただしK_S^2や$\chi(\mathcal{O}_S)$についてではなく，Sign Sについてそれを試みようというわけである。その理由は，Hirzebruchの公式等を通じて後者と前者が直接繋がっているのみならず，この不変量だと位相幾何の成果を直接取り入れられるという利点もある。しかしそのような気持ちになるまでには，筆者にとっても多大な時間を要した。

元来，Sign Sの局在化を扱うという発想自体，代数幾何出身の我々には浮かばない事と思う。筆者にとって局所符号数の概念を初めて知ったのは，1994年北大での「第1回リーマン面と関連する位相幾何学」研究集会における，種数2のLefschetz族を扱った松本幸夫氏の講演においてである。氏の与えた局所符号数とその値 $\sigma($$) = -\frac{1}{5}$，$\sigma($$) = -\frac{3}{5}$は，これが分数不変量であった事とあいまって，当時の筆者には誠に不思議というか，異様に思われた。

その不思議さをなんとか我々の言葉で解釈しようとしたのが[AA, I, §4]の動機で，（考えたのは）1997年頃と思う。[AA]は超楕円的な場合のみであるが，一般の場合でもHorikawa指数の定式化と局所符号数の定式化には一定の関係（[AK, (2.1.3)式]等）があり，これらを通じて局所符号数の概念の重要性を認識していったのである。

1994年の北大の集会に話をもどすが，ここでのもう一つの大きな収穫は3.3節でも登場した松本-Montesinos理論[MM]の存在を，松本氏自身より教わった事である。[MM]を，これも自分の立場で解釈しようと踠いた。1999年に，八ヶ岳の研究集会の報告[A1]を書いた頃に，安定曲線族への巡回群作用による商空間の解消空間と，松本-Montesinosの一般商空間の対応付けが，ほんの少しだけわかりそうに感じてきた。しかしその矢先（数カ月後くらい？）に高村茂氏よりプレプリント[Ta1]（[Ta2]の前身になったもので約25ページくらいの[Ta2]よりは格段に短い論文である）が送られてきて，そこにそれが書かれてあった。

このような場合，数学者にとって研究方向をすぐに転換するのは難しい事かもしれない。筆者の場合も例外ではなく，むしろ[Ta1]の応用を探すこと，特に当時うっすらと問題意識にあった，先のStep 2を$\omega(f,F)$に対して成すことに向けようとした。しかし，一体どんな方法が可能なのか？

その頃，古田幹雄氏を中心として主催されている指数定理に関連する第2回の城崎での研究集会の案内が送られてきた。その中に上正明氏による群作用を許容する指数定理に関する連続講演があった。当時，筆者のこの方面の知識は皆無であったのであるが，「群作用」という言葉に引かれ，

出掛けてみることにした。上氏の講演は淡々と進み，むしろ朴訥ささえ感じさせるものであったが，筆者の心には染み入るものがあった。探していたものがここにあったのだ！ 城崎からの帰路は幸せな気持ちであった。こうして，3節で述べたすべての道具立てが，自分の手の中に揃ったのだ。

同変符号数定理は筆者にとって始めて使う道具であり，不安であったので次のように計算を進めた。種数2の退化とその半安定環元の例を沢山作り，Horikawa指数を経由して局所符号数を求め，この場合の $\mathrm{def}(f,F)$ の値を先に求めておいた。そしてそれに"合う"ように，使い方を習得していったのである。ちょうど受験生が問題の答を見ながら，解き方を学ぶ体である----。

こんな具合にして定理にたどり着いた。

参考文献

[AA] T. Arakawa and T. Ashikaga, Local splitting families of hyperelliptic pencils I, Tohoku Math. J. **53** (2001), 369–394: II, to appear in Nagoya Math. J.

[As1] T. Ashikaga, 代数曲線の退化の性質, Hodge 理論・Log 幾何・退化研究集会報告集（朝倉・荒川・臼井編), pp. 104–136, 1999.

[As2] T. Ashikaga, Local signature of generic pencils of curves (tentative), in preparation.

[AE] T. Ashikaga and H. Endo, リーマン面の退化族の諸相, 数学（掲載予定).

[AK] T. Ashikaga and K. Konno, Global and local properties of pencils of algebraic curves, in *Algebraic Geometry 2000 Azumino*, ed. by S. Usui et al., Adv. St. in Pure Math. **36** (2002), 1–49.

[At] M. Atiyah, The logarithm of Dedekind η-function, Math. Ann. **278** (1987), 335–380.

[APS] M. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69: II, ibid. **78** (1975), 405–432: III, ibid. **79** (1976), 71–99.

[AS] M. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators III, Ann. of Math. **87** (1968), 546–604.

[BPF] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag 1984.

[BB] J. M. Bismut and J. B. Bost, Fibrés determinants, metriques de Quillen et degenerescence des courbes, Acta. Math. **165** (1990), 1–103.

[BGS] J. M. Bismut, H. Gillet and C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, Commum. Math. Phys. **115** (1988), 49–78: II, ibid. **115** (1988), 79–126: III, ibid. **115** (1988), 301–351.

[CF] P. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable Periodic Maps*, Springer, 1964.

[CH] M. Cornalba and J. Harris, *Divisor classes associated to families of stable varieties with application to the moduli space of curves*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **21** (1988), 455–475

[DM] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), 75–110.

[E] H. Endo, Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations (with Appendix written by T. Terasoma), Math. Ann. **316** (2000), 237–257.

[Fr] D. S. Freed, Determinant line bundles, *Mathematical Aspects of String Theory*, pp. 189–238, ed. by S. T. Yau, World Scientific, 1987.

[Fu1] M. Furuta, 曲面束と局所符号数, リーマン面に関連する位相幾何学研究集会報告集（河澄編), pp. 47–53, 1999.

[Fu2] M. Furuta, 曲面束と局所符号数, 代数幾何学城崎シンポジウム報告集, pp. 94–103, 2000.

[Fu3] M. Furuta, 指数定理 1, 2, 岩波書店, 2002.

[Hi] F. Hirzebruch, *Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie*, Springer, 1956.

[HZ] F. Hirzebruch and D. B. Zagier, *The Atiyah-Singer index theorem and elementary number theory*, Publish or Perish, 1974.

[Ho] E. Horikawa, On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, In: *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, a volume dedicated to K. Kodaira, pp. 79–90, Tokyo and Cambridge, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press, 1977

[I] M. Ishizaka, On Horikawa index of families of genus three curves with periodic monodromy, Preprint.

[KU] K. Kato and S. Usui, Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures, Preprint.

[KM] F. F. Knudsen and D. Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves I, Math. Scand. **39** (1976), 19–55.

[Ko1] K. Konno, Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 6$, Math. Ann. **290** (1991), 77–107

[Ko2] K. Konno, Clifford index and the slope of fibered surfaces, J. Alg. Geom. **8** (1999), 207–220

[Ma1] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two - a topological approach -, in: *Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on "Topology and Teichmüller Spaces"*, pp. 123–148, World Scientific, Singapore, 1996.

[Ma2] Y. Matsumoto, A topological classification of singular fibers of genus ≥ 2, 退化, 被覆, 特異点の代数幾何とトポロジー研究集会報告集（足利-尾形編), pp. 86–104, 1996.

[MM] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, Pseudo-periodic maps and degenerations of Riemann surfaces I, II, Preprints, 1991/1992.

[Mo] A. Moriwaki, *A sharp slope inequality for general stable fibrations of curves*, J. reine. angew. math. **480** (1996), 177–195

[Mu1] D. Mumford, *Curves and Their Jacobians*, Univ. of Michigan Press, 1975.

[Mu2] D. Mumford, On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety, Lect. Notes in Math **997** (1983), 348–375.

[N] J. Nielsen, Surface transformation classes of algebraically finite type, Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **21** (1944), pp.3–89. English translation: in Collected Papers 2, Birkhäuser, 1986.

[RS] D. B. Ray and I. M. Singer, Analytic torsion for complex manifolds, Ann. of Math. **98** (1973), 154–177.

[OS] S. Ogata and Ma. Saito, Signature defect and eta functions of degenerations of abelian varieties, Japan J. Math. **23** (1997), 319–364.

[Q] D. Quillen, Determinants of Cauchy-Riemann operators on a Riemann surface, Funct. Anal. Appl. **19** (1985), 31–34.

[RG] H. Rademacher and E. Grossward, *Dedekind Sums*, Carus Mathematical Monograph No. 16, MAA, 1972.

[Tak1] S. Takamura, Cyclic quotient constructions of degenerations of complex curves, Preprint, 1999.

[Tak2] S. Takamura, Towards the classification of atoms of degenerations II, (Linearization of degenerations of complex curves), RIMS Preprint 1344 (2001).

[Tan] S. L. Tan, On the invariants of base changes of pencils of curves I, Manuscripta Math. **84** (1994), 225–244: II, Math. Z. **222** (1996), 655–676.

[Te1] T. Terasoma, Degenerations of curves and analytic deformations, Preprint 1998.

[Te2] T. Terasoma, An appendix to Endo's paper, Math. Ann. **316** (2000), 355–357.

[U] K. Ueno, Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata* (1987), pp. 749–770, Kinokuniya.

[Y1] K. Yoshikawa, A local signature for generic 1-parameter deformation germs of a complex curve, 退化, 被覆, 特異点の代数幾何とトポロジー研究集会報告集（足利-尾形-今野編), pp. 188–200, 2000.

[Y2] K. Yoshikawa, 解析的トーションとモジュライ空間上の保型形式, 数学 **52** (2000), 142–158.